高数A(I) 期末总结

整理人：24-信科-seto1

1 期中复习

1.1 序列极限

序列极限的性质：有限无关性、保序性、子列性质。

单调收敛准则：有上界的单调递增序列收敛，反之亦然。

柯西命题：若序列a_n收敛于l，则

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{n}=l$$

1.2 函数极限

设函数$y=f(x)$在a的去心邻域上有定义，则称其于$x=a$处收敛于l，若

$$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,s.t.\forall x,0<|x-a|<\delta\implies|f(x)-l|<\epsilon$$

归结定理：

$$\lim_{x\to a}f(x)=l\Leftrightarrow\forall x_n\subset U_r^0(a),\lim_{n\to+\infty}x_n=a\implies\lim_{x\to+\infty}f(x_n)=l.$$

等价无穷小：$1-cosx\sim\frac{x^2}{2},a^x-1\sim x\ln a,\arcsin x/\arctan x\sim x,(1+x)^a-1\sim ax$（泰勒展开）

1.3 连续函数

间断点：可去间断点（收敛但收敛值不等于函数值）；跳跃间断点（两个单侧极限存在但不相等）；第二类间断点（单侧极限至少其一不存在）。

1.4 导数

求高阶导数的莱布尼茨公式：

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[f(x)g(x)\right]=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{d^k}{dx^k}f(x)\cdot\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}g(x)$$

其余的直接用泰勒公式展开再求高阶导数即可。*$(sinx/cosx)^{(n)}=sin/cos(x+\frac{n\pi}{2})$）

1.5 不定积分/定积分

考到了算我倒霉。

2 微分中值定理

2.1 中值定理证明

2.1.1 罗尔中值定理

依赖费马定理，取区间最大、最小值。

拓展1：达布定理——任意导函数具有介值性。

拓展2：广义罗尔定理（无穷区间）：两侧取统一值用介值定理/化为$tan\ x$，无界化有界。

2.1.2 拉格朗日/柯西中值定理

构造辅助函数，拉格朗日中值定理是柯西中值定理的特殊情况。

2.1.3 辅助函数构造

有分式先化为整式，再考虑原函数尝试用罗尔定理。

尝试高中凑函数算法。例：欲取$f(x) - f''(x) = 0$，则构造辅助函数$e^{-x}(f(x) + f'(x))$。

2.2 中值定理应用（可以先画图）

2.2.1 罗尔定理应用

常值函数证明、分析函数零点存在性/个数（求积分求原函数零点）。

*罗尔定理一般只能给出零点的下限个数/上限个数（反证法），无法确定零点确切个数。

2.2.2 拉格朗日定理应用

计算极限、证明不等式（核心是找到$f(b)-f(a)$）；二元函数拉格朗日定理（实质是0阶泰勒公式）。

2.2.3 柯西中值定理应用

证明洛必达法则：补充端点值为0，使区间长度趋于0。

*无穷洛必达法则证明：记$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A$，取$x_1 \to a$，则$\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_1)}{g(x)}}{1-\frac{g(x_1)}{g(x)}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$，将右侧两式交叉相乘，用$\epsilon - \delta$语言论证即可。

进一步地，洛必达法则可在证明题中建立f相关极限和f'相关极限之间的关系。

3 洛必达法则使用步骤

1 若为序列极限，则通过归结定理转化为函数极限。

2 转化为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型。

3 寻找等价无穷小简化计算。

4 洛。不断洛。洛到没法洛。

5 若最后失败，则考虑其他方法，优先考虑泰勒展开！

4 泰勒公式

4.1 概念

4.1.1 局部泰勒公式

何为泰勒多项式？皮亚诺余项？麦克劳林余项？

4.1.2 带拉格朗日余项的泰勒公式

4.1.3 二元函数泰勒公式

$$f(x,y) = f(a,b) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \bigg|_{(a,b)} \right)^k + o((\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})^n)$$

拉格朗日余项：$\frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(a + \theta \Delta x, b + \theta \Delta y)$。

4.2 计算

4.2.1 背熟公式

e^x、$sinx$、$cosx$、$ln(1+x)$、$(1+x)^\alpha$。

4.2.2 简单变形

乘法（均展开至相应余项）、换元（接近正确形式/不在0处）、分式拆分（类比有理分式积分）。

*尤其在二元函数中，尝试能否换元为一元函数。

4.2.3 微分法

针对$f'(x)$泰勒展开容易求的情况（例：$arctan\ x$），“作积分”即可。

4.2.4 泰勒公式反求高阶导数

通过换元/乘法/微分法等，泰勒公式易于计算，可直接通过对比各项得到高阶导数。

4.3 应用

4.3.1 计算极限

在洛必达法则无法进行时，计算分式极限，具有通用性，但计算量相对较大。

4.3.2 证明题

一般使用带拉格朗日余项的泰勒公式，构建各阶导数之间的关系。

*在极限题中，关注凑出导数定义后加以化简。

5 解析几何

5.1 内积与外积

外积计算公式/外积、混合积的几何意义/内积、外积均不满足结合律，外积有反交换律。

5.2 平面的方程

法式方程、一般方程、*三点式方程、截距式方程

5.3 直线的方程

标准方程（分母可为0）、**参数方程**及其与两面式方程的互化（方向向量为两个法向量的外积）。

5.4 距离公式

点到直线的距离：

$$d = \frac{|\mathbf{e} \times \overrightarrow{MM_0}|}{|\mathbf{e}|}$$

5.5 空间曲线

参数方程、切向量、法平面的计算（弧长公式）。

6 多元函数微分学（简单推广）

6.1 二元极限的分析

收敛：夹逼定理/换元为一元极限/等价无穷小/**极坐标换元**

发散：不同路径（水平/垂直/沿$y=kx/y=kx^2/y=k\sqrt{x}$，若分母/分子本身不齐次）

*闭区域上连续函数的性质：在区域D上，有界性、最值可达、介值性。

6.2 可微性的判定

几乎都是借助可微的定义：

$$f(x,y) \text{ 在 } (x_0,y_0) \text{ 处可微} \iff \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-f_x(x_0,y_0)h-f_y(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

*若在此点不连续或某偏导数不存在，则一定不可微。

6.3 可微、连续和可偏导

各偏导数连续⇒可微。反向反例：

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{if } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{if } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

可微⇒连续。反向反例：$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$或$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$

可微⇒偏导数存在。反向反例：

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & \text{if } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{if } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

连续⇏偏导数存在。反例：$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

偏导数存在⇏连续。反例：

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{if } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{if } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

6.4 方向导数与梯度

梯度：$grad\ f|_{(x_0,y_0)}=(\partial_x f(x_0,y_0),\partial_y f(x_0,y_0))$ 上升最快方向

方向向量：设$\overrightarrow{n}=(a,b)$为单位向量，则方向导数为$\partial_n f=\lim_{t\to0}\frac{f(x_0+ta,y_0+tb)-f(x_0,y_0)}{t}$.

$\partial_n f=grad\ f|_{(x_0,y_0)}\cdot\overrightarrow{n}$

6.5 复合函数求导

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

其中，$\frac{\partial f}{\partial u}$和$\frac{\partial f}{\partial v}$是关于$x, y$的函数，如

$$\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial u}}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

7 隐函数定理

7.1 隐函数存在定理

对$F(x_0, y_0) = 0$，在(x_0, y_0)附近研究，该函数在其邻域有定义，偏导数连续，且$\partial_y F(x_0, y_0) \neq 0$,则可唯一定义隐函数$y = f(x)$，且光滑性与$F(x, y)$一致。

推广到多元隐函数，则满足对因变量偏导数非0即可。

7.2 隐函数偏导数计算

$$\frac{df}{dx} = -\frac{\partial_x F(x, y)}{\partial_y F(x, y)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial_x F(x, y, z)}{\partial_z F(x, y, z)}$$

*二阶偏导数需要将一阶偏导中的z看作$z(x, y)$求偏导。

7.3 方程组隐函数及其偏导数的计算

$$\begin{cases} F(x, u, v) = 0 \\ G(x, u, v) = 0 \end{cases}$$

将条件3修改为Jacobi行列式：

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \partial_u F_1(u, v) & \partial_v F_1(u, v) \\ \partial_u F_2(u, v) & \partial_v F_2(u, v) \end{vmatrix} \neq 0$$

*其可以被推广到n元方程组。

***逆映射存在性定理**：$(u, v) \mapsto (x, y)$存在的充分条件是其Jacobi行列式不为0。

偏导数计算：在方程组中对x求导即可，解关于$u'(x)$、$v'(x)$方程组，事实上，Jacobi行列式就是方程组的系数矩阵行列式。

8 极值问题

8.1 简单一元函数性质

凹凸性定义（上凸为例）：[**1**]$f''(x_0) < 0$； [**2**]$f(x) < f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$； [**3**]$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) > \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$（图像在割线上方，切线下方）

渐近线：垂直渐近线（与x轴垂直，一定是第二类间断点）/**一般渐近线**$y = ax + b$：

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax)$$

8.2 一般极值问题

8.2.1 一阶必要条件

设f在该点可导，若其为f的一个极值点，则：

（一元）$f'(x_0) = 0$

（二元）$\partial_x f(x_0, y_0) = \partial_y f(x_0, y_0) = 0$

满足这一性质的点称为稳定点。

8.2.2 二阶充分条件

若f在某点的邻域有连续的二阶（偏）导数，且此点为稳定点，则：

（一元）若$f''(x_0) < 0$，则x_0为极大值点；若$f''(x_0) > 0$，则x_0为极小值点。

（二元）令：

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

[**1**] 若$B^2 - AC < 0$且$A > 0$，则(x_0, y_0)是极小值点；

[**2**] 若$B^2 - AC < 0$且$A < 0$，则(x_0, y_0)是极大值点；

[**3**] 若$B^2 - AC > 0$，则(x_0, y_0)不是极值点，称为鞍点；

*若$f''(x_0) = 0$（一元）或$B^2 - AC = 0$（二元），则通过函数性质具体分析（限制于某一直线）。

（应用）最小二乘法：确定$y = ax + b$，使得$u(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$有最小值：考虑$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial u}{\partial b} = 0$

8.2.3 条件极值问题

在$\phi(x, y) = 0$的约束下求$z = f(x, y)$的最值点：拉格朗日乘子法。

构造$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \phi(x, y)$，求其所有稳定点，在其中找到最大/最小值。